



TITLE:

# KRのTransferについて (無限ループ空間の位相)

AUTHOR(S):

永田, 雅嗣

---

CITATION:

永田, 雅嗣. KRのTransferについて (無限ループ空間の位相). 数理解析研究所講究録 1980, 389: 114-121

ISSUE DATE:

1980-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104921>

RIGHT:

## KR の transfer について

京大 数理研 永田 雅嗣

$G$  を有限群とする。 $G$ -コホモロジー論  $h_G^*$  において、同変ファイバーバンドルに対して定義される Becker-Gottlieb 型の transfer, Nishida transfer が、 $KRG$ -群においては、同変有限被覆に対して幾何学的に定義される Atiyah transfer と一致することを証明する。この結果を使って、 $KR$ -論における Segal-Becker 型定理を証明することもできる。

### §1. 定義

$G$  を有限群、 $\Gamma$  をコンパクトリー群、 $\alpha: G \rightarrow \text{Aut } \Gamma$  を準同型とする。 $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  が  $(\Gamma, \alpha, G)$ -bundle であるとは、

$E = \tilde{E} \times_{\tilde{p}} F$ ,  $\tilde{E} \xrightarrow{\tilde{p}} B$  は principal  $\Gamma$ -bundle,

$\tilde{E}$  は  $\Gamma \rtimes G$ -space で  $\tilde{p}$  は  $G$ -map,

$F$  は closed  $\Gamma \rtimes G$ -manifold,  $B$  は compact  $G$ -space

が成り立つときをいう。( [5] 参照。)

$h_G^*$  を Kosniowski [4] の意味での  $RO(G)$ -graded な  $G$ -コホモロジー論とする。  $(\Gamma, \alpha, G)$ -bundle  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  に対する Nishida transfer

$$p_! : h_G^*(E) \longrightarrow h_G^*(B)$$

は、[5] において次のように定義された。

$F \hookrightarrow W$  を実  $\Gamma \rtimes G$ -module  $W$  への  $\Gamma \rtimes G$ -embedding,  $\nu(F)$  をその法束とする。  $G$ -ベクトル束  $\eta = \tilde{E} \times_{\Gamma} W \rightarrow B$  に対して、 $\eta \oplus \eta^\perp \cong B \times V$  ( $V$  は実  $G$ -module) となる  $\eta^\perp$  をとる。

$$t(p) : B_+ \wedge V^c = (B \times V)^c \longrightarrow (E \times V)^c = E_+ \wedge V^c$$

を、 $B \times V \cong (\tilde{E} \times_{\Gamma} W) \oplus \eta^\perp \xleftarrow{\text{open embedding}} (\tilde{E} \times_{\Gamma} \nu(F)) \times_B \eta^\perp \xrightarrow{\text{proper map}} (\tilde{E} \times_{\Gamma} (F \times W)) \times_B \eta^\perp \cong E \times V$  の一点コンパクト化によりつくる。ここに  $X_+$  は  $X \amalg (\text{一点})$ ,  $V^c$  は  $V$  の一点コンパクト化をあらわす。合成

$$p_! : h_G^*(E) = \tilde{h}_G^*(E_+) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_G^{**+V}(E_+ \wedge V^c) \xrightarrow{t(p)^*} \tilde{h}_G^{**+V}(B_+ \wedge V^c) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_G^*(B_+) = h_G^*(B)$$

を Nishida transfer という。

以下では  $(\Gamma, \alpha, G)$ -bundle  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  が finite  $G$ -covering, すなわち  $F$  が有限集合のときを考える。

$h_G^* = KR_G^*$  とする。すなわち  $KR_G$  は実性  $G$ -ベクトル束の  $K$ -理論であって、( $G$  は実性有限群, すなわち 対合  $\tau: G \rightarrow G$  をもつ)

$$KR_G^{V-W}(X) = \tilde{K}R_G(X_+ \wedge (W \oplus \overline{V})^c)$$

とおくことにより  $RO(G \rtimes \mathbb{Z}_2)$ -graded な  $G \rtimes \mathbb{Z}_2$ -コホモロジー論になる。(ここに  $\overline{V}$  は  $V \oplus \overline{V} \in RR(G)$  となるような実表現で

ある。 $\bar{V}$ の定義, および  $KR_G^*$  の定義については [3] 参照.)

Atiyahの幾何学的 transfer  $\tau: KR_G(E) \rightarrow KR_G(B)$  は、  
 $E$ 上の実性  $G$ -ベクトル束  $\xi \rightarrow E$  に対し、実性  $G$ -ベクトル  
 束  $\tau\xi \rightarrow B$  を、

$$(\tau\xi)_x = \bigoplus_{y \in p^{-1}(x)} \xi_y$$

とおくことにより定義された。 ([1])

## §2. 命題と系

命題  $E \rightarrow B$  が finite  $G$ -covering のとき、

$$\tau = p_! : KR_G^0(E) \rightarrow KR_G^0(B)$$

系  $G = \{e\}$  とする。  $U(2n)/_{\{1\} \times N(T^{n-1}) \times U(n)} \rightarrow U(2n)/_{T^1 \times N(T^{n-1}) \times U(n)}$

に同伴した1次元実性ベクトル束を  $\alpha$ 、

$U(2n)/_{\{1\} \times U(n)} \rightarrow U(2n)/_{N(T^n) \times U(n)}$  に同伴した  $n$ 次元実性

ベクトル束を  $\beta$  とする。ただし  $U(2n)$  およびその部分

群には標準的な複素共役による対合が与えられている

ものとする。このとき  $n$ 重 covering  $p: U(2n)/_{T^1 \times N(T^{n-1}) \times U(n)}$

$\rightarrow U(2n)/_{N(T^n) \times U(n)}$  に対する transfer を  $p_!$  とすると、

$$p_!(\alpha) = \beta.$$

この系は、次の定理の証明に使われる。

定理 ([6])  $\mathbb{C}P^\infty$  に標準的な複素共役による対合を与える。 $X$  を基点をもった finite  $\mathbb{Z}_2$ -complex とすると、

自然な split epimorphism

$$\lambda_*: \{X, \mathbb{C}P^\infty\}_{\mathbb{Z}_2} \rightarrow \widetilde{KR}(X)$$

が存在する。

### § 3. 命題の証明

$F \rightarrow E \rightarrow B$  が finite  $G$ -covering のときは、 $\nu(F) \cong F \times W$  となるから、transfer を定義する写像  $t(p)$  は、 $t(p) = i^c$ 、ただし

$$i: E \times V \hookrightarrow B \times V$$

は実性  $G$ -open embedding で合成  $E \hookrightarrow E \times V \hookrightarrow B \times V \rightarrow B$  が  $p$  と一致するもの、としてよい。

コンパクトな実性  $G$ -space  $X$  に対し、 $KR_G$ -論の懸垂同型  $\sigma$  は、次の合成により得られる。

$$KR_G(X) \xrightarrow[\cong]{\otimes \Lambda_{V \oplus \bar{V}}} KR_G(X \times V \times \bar{V}) \xrightarrow[\cong]{f} \widetilde{KR}_G(X_{+ \wedge (V \oplus \bar{V})^c}) = KR_G^V(X_{+ \wedge V^c})$$

ただし  $\Lambda_{V \oplus \bar{V}}$  は、 $V \oplus \bar{V} \in RR(G)$  を複素ベクトル空間とみての外積による Thom 要素、また局所コンパクト実性  $G$ -space  $Y$  に対する  $KR_G(Y)$  は、コンパクトな support をもつ  $Y$  上の実性  $G$ -ベクトル束の複体 に、[7], §3 に示されたような同値関係を入れたもののなす集合と定義する。このとき " $\otimes \Lambda_{V \oplus \bar{V}}$ "

が同型になることは [2], § 5 に示されている。

Segal の結果 ([7]) は  $KR_G$  にも同様に拡張される :

- (i)  $Y$  がコンパクトのときに  $KR_G(Y)$  の二つの定義は一致する。
- (ii)  $X, A$  がコンパクト,  $X \supset A$  のとき、

$$KR_G(X, A) \xrightarrow{\cong} KR_G(X - A)$$

これにより上の写像  $f$  は同型になる。

$V$  を  $V \oplus \bar{V}$  でとりかえることにより、命題の証明は、図式

$$\begin{array}{ccccc} KR_G(E) & \xrightarrow[\cong]{\otimes \Lambda} & KR_G(E \times V) & \xrightarrow[\cong]{f} & \widehat{KR}_G(E_+ \wedge V^c) \\ \downarrow \tau & & & & \downarrow (i^c)^* \\ KR_G(B) & \xrightarrow[\cong]{\otimes \Lambda} & KR_G(B \times V) & \xrightarrow[\cong]{f} & \widehat{KR}_G(B_+ \wedge V^c) \end{array}$$

の可換性を示せば十分である。

補題  $i: X \hookrightarrow Y$  を局所コンパクトな実性  $G$ -spaces の open な実性  $G$ -embedding,  $Y$  上の任意の実性  $G$ -ベクトル束が *inverse bundle* をもつと仮定する。

$KR_G(X) \ni \xi = [\xi_0 \xrightarrow{\alpha} \xi_1]$ ,  $KR_G(Y) \ni \zeta = [\zeta_0 \xrightarrow{\alpha'} \zeta_1]$  が

$$\text{supp}(\zeta) \subset X, \quad \zeta|_X = \xi \text{ in } KR_G(X)$$

を満たすとき、 $\zeta = f^{-1} \circ (i^c)^* \circ f(\xi)$  が成り立つ。

証明 次の図式は可換である :

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{KR}_G(X^c) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & KR_G(Y^c, Y^c-X) & \xrightarrow{j^*} & KR_G(Y^c, *) = \widetilde{KR}_G(Y^c) \\
 & \searrow f \cong & \downarrow \text{res} & \searrow \text{res} & \downarrow f^{-1} \\
 & & KR_G(X) & \xleftarrow{\text{res}} & KR_G(Y, Y-X) \xrightarrow{j^*} KR_G(Y)
 \end{array}$$

ただし  $\varphi$  はコンパクト対の切除同型 ([7], (2.9)), 従って第一行の合成は  $(j^*)^*$  に等しい。また  $\text{res}$  はベクトル束の複体の制限による写像で、従って垂直方向の写像は前述の (ii) により同型である。

$KR_G(X) \ni \xi = \zeta|_X$  は、 $\text{supp}(\zeta) \subset X$  であるから  $KR_G(Y, Y-X)$  の元  $\zeta$  の像であるが、補題の仮定によりこの元は  $KR_G(Y^c, Y^c-X)$  の元に拡張できる。([7], (A.4) 参照)  $\varphi \circ f$  が同型であるからこの元は  $\varphi \circ f(\xi)$  と一致し、 $f^{-1} \circ j^* \circ \varphi \circ f(\xi)$  は  $\xi$  と一致する。これで補題が証明された。

$E$  上の実性  $G$ -ベクトル束  $\alpha$  をとる。  $i: E \times V \hookrightarrow B \times V$  について  $\xi = \alpha \otimes \Lambda$ ,  $\zeta \cong \tau(\alpha) \otimes \Lambda$  となり補題の条件を満たす  $\xi, \zeta$  を、以下で構成する。

$\xi = \alpha \otimes \Lambda = [\alpha \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{id \otimes d^E} \alpha \otimes \Lambda_1]$ ,  $\tau(\alpha) \otimes \Lambda = [\tau(\alpha) \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{id \otimes d^B} \tau(\alpha) \otimes \Lambda_1]$  とおく。  $\text{supp}(\tau(\alpha) \otimes \Lambda) = B \times \{0\}$  である。

$\{U_\lambda\}$  を、  $G \cong \mathbb{Z}_2$ -不変 finite open covering of  $B$  で、

$$p^{-1}(U_\lambda) = \coprod_j W_\lambda^j, \quad p: W_\lambda^j \xrightarrow{\cong} U_\lambda \text{ (非同変な同相)}$$

となるものとする。  $\tau(\alpha)|_{U_\lambda} = \bigoplus_j \alpha|_{W_\lambda^j}$  が成り立つ。

$s \in I = [0, 1]$  に対して、 $W_\lambda^j \times V \cong U_\lambda \times V$  上の複素ベクトル束  
準同型  $\varphi_\lambda^j(s) : \alpha|_{W_\lambda^j} \otimes \Lambda_0 \longrightarrow \alpha|_{W_\lambda^j} \otimes \Lambda_1$  を、

$$\varphi_\lambda^j(s)_{(\alpha, v)}(y \otimes w) = y \otimes \partial_{v - s \cdot \pi \circ i(\lambda, 0)}^B(w),$$

$x \in W_\lambda^j$ ,  $y \in \alpha_x$ ,  $v, w \in V$ , ( $\pi : B \times V \rightarrow V$  は射影)

で定義する。

$j$  について直和をとることにより、 $U_\lambda \times V \times I$  上の束準同型

$$\Delta_\lambda : (\tau(\omega) \otimes \Lambda_0) \times I \longrightarrow (\tau(\omega) \otimes \Lambda_1) \times I$$

が定まる。 $\pi \circ i : E \times V \rightarrow V$  が  $G \times \mathbb{Z}_2$ -同変写像であることにより、 $\Delta_\lambda$  が実性  $G$ -ベクトル束準同型であることは容易にわかる。

$\pi \circ i(\lambda, 0) \in V$  は  $\lambda$  のとり方により定まるから、 $\Delta_\lambda$  は、  
 $B \times V \times I$  上の実性  $G$ -ベクトル束準同型

$$\Delta : (\tau(\omega) \otimes \Lambda_0) \times I \longrightarrow (\tau(\omega) \otimes \Lambda_1) \times I$$

を定める。

$\zeta = [ \tau(\omega) \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta|_{B \times V \times \{1\}}} \tau(\omega) \otimes \Lambda_1 ] \in KR_G(B \times V)$  とおく。  
 $s = 0$  のとき  $\varphi_\lambda^j(0) = \alpha \otimes \partial^B$  故に  $\zeta \cong \tau(\omega) \otimes \Lambda$  である。また  
 $\text{supp}(\zeta) = i(E \times \{0\}) \subset i(E \times V)$  である。よって  $\zeta|_{i(E \times V)} \cong \alpha \otimes \Lambda$   
を示せばよい。

$p^*(\tau(\omega)) = \alpha \oplus \sigma$ ,  $\sigma|_{W_\lambda^k} = \bigoplus_{k \neq j} \alpha|_{W_\lambda^k}$  と分解することとに注意すると、  
 $\zeta|_{i(E \times V)} = [ p^*(\tau(\omega)) \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta} p^*(\tau(\omega)) \otimes \Lambda_1 ]$   
 $= [ \alpha \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta} \alpha \otimes \Lambda_1 ] \oplus [ \sigma \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta} \sigma \otimes \Lambda_1 ]$



と分解する。ここで  $\Delta|_{\alpha \otimes \Lambda_0} = id \otimes \tau^* \partial^B$ ,  $\tau: V \cong U \hookrightarrow V$ , ただし  $U$  は  $V$  の原点におけるある開近傍で、標準的に  $V$  と同一視できるもの, という形をしていることは容易にたしかめられ、従って再び補題を使えば  $[\alpha \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta} \alpha \otimes \Lambda_0] \cong \alpha \otimes \Lambda \in KR_G(E \times V)$  がわかる。また  $\Delta|_{\tau \otimes \Lambda_0}$  は明らかに束の同型写像であるから  $[\tau \otimes \Lambda_0 \xrightarrow{\Delta} \tau \otimes \Lambda_0] = 0$  である。これで命題が証明された。

なお、この報告は [6] の命題 2.4 を紹介したものである。

### 文献

- [1] M. F. Atiyah, Characters and cohomology of finite groups, Publ. Math. IHES 9 (1961), 23-64.
- [2] M. F. Atiyah, Bott periodicity and the index of elliptic operators, Quart. J. Math. Oxford (2), 19 (1968), 113-40.
- [3] 橋本 伸, The transfer maps in the KR-theory, 本講要録.
- [4] C. Koenigowski, Equivariant cohomology and stable cohomotopy, Math. Ann. 210 (1974), 83-104.
- [5] G. Nishida, The transfer homomorphism in equivariant generalized cohomology theories, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978) 435-451.
- [6] M. Nagata, G. Nishida and H. Toda, Segal-Becker theorem for KR-theory, preprint.
- [7] G. Segal, Equivariant K-theory, Publ. Math. IHES 34 (1968), 129-151.